Esercizi su integrali curvilinei di campi vettoriali

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Dati

$$\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ campo } \underline{\text{vettoriale continuo}}$$

Γ curva regolare a tratti, con rappr. param. $\overrightarrow{r}(t)$, $t \in [a,b]$, $\overrightarrow{r}([a,b]) \subset A$

chiamiamo integrale curvilineo di $\overrightarrow{F}$ lungo Γ

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} := \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

In particolare, se $\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e Γ è una curva piana = grafico di una funzione g

$$\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + g(t)\,\overrightarrow{i}_2 \quad t \in [a,b]$$

si ha

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = \int_a^b \big(F_1(t,g(t)) + F_2(t,g(t))g'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Es. 6. (assegnato)

Calcolare

$$\int_\Gamma (2xy + 2x - 4)\ dx + \left(x^2 + 2y\right)\ dy$$

ove Γ è l'arco di ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

percorso in senso antiorario.

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\,\vec{i_1} + \sin(t)\,\vec{i_2}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-2\sin(t))\,\vec{i_1} + \cos(t)\,\vec{i_2}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (4\cos(t)\sin(t) + 4\cos(t) - 4)\,\vec{i_1}$$

$$+ (4\cos^2(t) + 2\sin(t))\,\vec{i_2}$$

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)$$
$$= -8\cos(t)\sin^2(t) - 6\sin(t)\cos(t) + 8\sin(t) + 4\cos^3(t)$$

Trucco per integrare $4\cos^3(t)$:

$$\int \cos^3(t)\,dt = \int \cos(t)\,(\cos^2(t))\,dt$$
$$= \int \cos(t)\,(1-\sin^2(t))\,dt$$

e poi uso che $\cos(t)\sin^2(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^3(t)}{3}\right)$

Esercizio: completare il calcolo di

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = 5$$